Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій



**ЗВІТ**

**Про виконання лабораторної роботи № 2**

«розв’язування нелінійних рівнянь методом дотичних та методом послідовних наближень»

**з дисципліни «Чисельні методи»**

**Лектор:**

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

**Виконав:**

студ. групи ПЗ-15

Марущак А. С.

**Прийняв:**

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 2022 р.

∑ = \_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Львів – 2022

**Тема роботи:** розв’язування нелінійних рівнянь методом дотичних та методом послідовних наближень.

**Мета роботи:** ознайомлення на практиці з методом дотичних та методом послідовних наближень для розв’язування нелінійних рівнянь.

**Теоретичні відомості**

Наступні методи розв’язування нелінійних рівнянь дозволяють знайти розв’язок для наступної задачі:Розглянемо рівняння , у якому є неперервною нелінійною функцією. На відрізку  дана функція є монотонною та диференційованою, на ньому міститься єдиний корінь заданого рівняння, тобто . Потрібно знайти значення кореня з заданою похибкою .

В лабараторній роботі №1 ми розглянули 2 методи: бісекції та хорд. Нижче ми розглянемо наступні два.

**Метод Ньютона (метод дотичних)**

Геометричний зміст методу Ньютона полягає в тому, що дугу кривої y = f (x) на відрізку [a,b] замінюють дотичною до цієї кривої, а наближене значення кореня визначають як абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox , проведеної через один із кінців відрізка (рис 2.1). Запишемо рівняння дотичної до кривої в точці :

Покладемо у цьому співвідношенні y = 0 і визначимо x. У результаті отримаємо

Тоді ітераційні формули запишемо у вигляді

Для вибору початкового наближення кореня рівняння f (x) = 0 необхідно керуватися таким правилом: за початкову точку слід вибирати той кінець відрізка [a,b] , в якому знак функції y = f (x) співпадає зі знаком її другої похідної f ′′(x).

Процес побудови дотичної продовжуємо до тих пір, поки не виконається нерівність , де – задана точність шуканого розв’язку; – наближені значення кореня рівняння f (x) = 0 на i -му та ( i +1 )-му кроках.

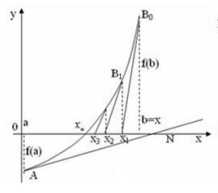
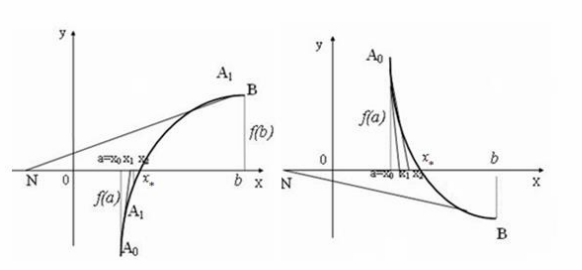


Рис 2.1 Графічна інтерпретація методу дотичних.

**Алгоритм методу Ньютона:**

1. Отримати значення a, b, .
2. Обрати початкове наблження в залежності від того, на якому кінці відрізка (a або b) значення функції має той самий знак, що і друга похідна.
3. Допоки , то .
4. Отримуємо і виводимо результат.

**Метод простої ітерації (метод послідовних наближень)**

Одним із найпоширеніших методів чисельного розв’язування нелінійних рівнянь є метод простої ітерації. Іноді його називають методом послідовних наближень.

Рівняння f (x) = 0 запишемо у канонічній формі

Довільним способом визначимо наближене значення кореня рівняння і підставимо його в праву частину цього співвідношення. У результаті отримаємо

.

Підставивши тепер в праву частину рівняння (3.5) замість значення , отримаємо . Повторюючи цей процес, отримаємо ітераційні формули

Кожний дійсний корінь рівняння є абсцисою точки перетину M кривої y = ϕ(x) з прямою y = x (рис. 2.2).

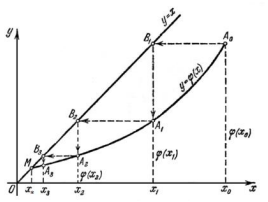


Рис 2.2 Графічна інтерпретація методу ітерацій

Доведено, що ітераційний процес, збігається до єдиного кореня рівняння f (x) = 0 , якщо на відрізку [a;b] , що містить цей корінь, виконується умова:

Збіжність процесу ітерації буде тим швидшою, чим меншим є число q , яке задовольняє нерівність. Якщо умова не виконується, то необхідно перетворити рівняння до вигляду так, щоб досягти її виконання. Наприклад, можна визначати функцію зі співвідношення

де значення k вибирають так, щоб виконувалась умова . Тут та знак k співпадає зі знаком на відрізку [a;b]. Ітераційний процес продовжують до тих пір, поки не виконуватиметься умова,де – задана похибка шуканого кореня.

**Алгоритм методу простої ітерації:**

1. Обираємо початкове наближення та обираємо точність .
2. Допоки , то .
3. Виводимо результат.

**Індивідуальне завдання**

1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.
2. Скласти програму розв’язування нелінійного рівняння методом дотичних та методом простої ітерацій:

**Хід роботи**

Нагадаємо собі, що в результаті відокремлення коренів в лабараторній роботі №1 ми дійшли висновку, що корінь рівняння локалізований на відрізку [0; 1]. Тому і в подальшій роботі я буду використовувати цей відрізок.

Для того щоб далі застосувати метод простої ітерації, нам необхідно звести початкове рівняння до вигляду . Зробимо це наступним чином:

Звідки дістаємо, що . Її похідна . Для збіжності ітераційного процесу повинна виконуватись умова . Перевіримо цю умову, знайшовши глобальний максимум та мінімум похідної.

Візьмемо похідну від похідної та отримаємо, що . Функція має мінімум у точці рівний 9.75, тому .

З цього робимо висновок, що , і критичні точки можемо знайти, як корінь рівняння :

У точці функція має локальний максимум: .

У точці функція має локальний мінімум: .

Врахувавши, що , то, знайдені локальні максимум та мінімум є глобальними, і , що означає, що ітераційний процес буде збіжним при будь-якому початковому наближені і, при тому, з досить високою швидкістю.

Для подальшої роботи я використовуватиму функції f, df, d2f та phi, які відповідають функції , її першій та другій похідній, та функції . Їх код має наступний вигляд:

double f(double x)

{

return x\*x\*x + 3\*x\*x + 12\*x - 3;

}

double df(double x)

{

return 3\*x\*x + 6\*x + 12;

}

double d2f(double x)

{

return 6\*x + 6;

}

double phi(double x)

{

return 3/(x\*x + 3\*x + 12);

}

**Метод Ньютона(дотичних):**

Код функції:

double **findTangents**(double start, double end, double precision, int &iterations)

{

double x\_prev = 0;

double x = f(start)\*d2f(start) > 0 ? start : end; // За початкове наближення обираємо той кінець, де знак функції збігається зі знаком її другої похідної

do {

x\_prev = x; // Зберігаємо попереднє значення

x = x - f(x)/df(x); // Використовуємо рекурентну формулу для отримання наступного наближення

iterations++;

} while(fabs(x - x\_prev) > precision); // Допоки не досягнемо заданої точності..

return x; // Повертаємо відповідь

}

**Метод простої ітерації:**

Код функції:

double **findSimpleIteration**(double x0, double precision, int &iterations)

{

double x\_prev = 0;

double x = x0; // За початкове наближення беремо х0.

do {

x\_prev = x; // Зберігаємо попереднє значення

x = phi(x); // Використовуємо рекурентну формулу для отримання наступного наближення

iterations++;

} while(fabs(x - x\_prev) > precision); // Допоки не досягнемо заданої точності..

return x; // Повертаємо відповідь

}

**Результат** виконання програми:

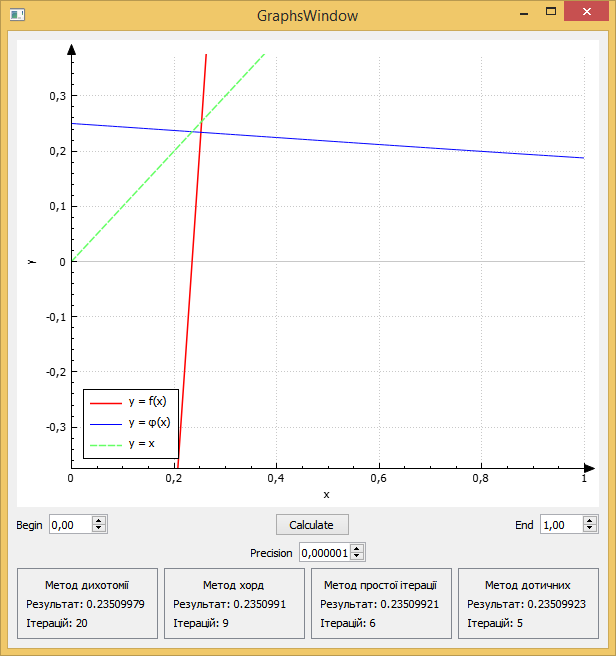


Рис 2.3. Результати виконання програми.

**Аналіз результатів:**

З рис 2.3 можна зробити декілька висновків:

* Точка перетину графіків та лежить над точкою перетину графіка з віссю , що означає, що ми правильно привели рівняння до вигляду .
* Корінь, знайдений кожним з чотирьох методів є однаковим, тому є вірним.
* Метод простої ітерації та дотичних в більшості випадків є швидшими за метод бісекції та хорд.

**Висновок:**

Я ознайомився на практиці з методами знаходження коренів нелінійних рівнянь та розробив функції для уточнення коренів на заданих проміжках на основі отриманих знань. Я встановив, що корінь рівняння знаходиться на відрізку [0; 1]. Потім, використавши методи хорд, бісекції, Ньютона та простої ітерації я уточнив локацію кореня і вирахував його наближене значення: .